(E_n^0) $\alpha_n y^{(n)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0$, $x_0 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \in G(I)$

⊛ Αν $y_1, \dots, y_k$ λύσεις $\Rightarrow$ τότε $\sum_{i=1}^{k} c_i y_i$

⊛ Liouville: $W(y_1, \dots, y_n)(x) = W(y_1, \dots, y_n)(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}(s)\,ds}$, $x \in I$.

[Σελ. 79] Παραδ. 4: Να βρεθεί η ορίζουσα Wronski των

$y_1(x) = e^x$

$y_2(x) = e^x(x-1)$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$y_3(x) = 2 e^x - e^{2x}$

$\rightsquigarrow$ λύσεις των $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^x(x-1) & 2e^x - e^{2x} \\ e^x & e^x(x-1) + e^x & 2e^x - 2e^{2x} \\ e^x & e^x + xe^x & 2e^x - 4e^{2x} \end{vmatrix} = W_0\, e^{-\int_0^x -\frac{4}{1}\,ds}$$

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

<u>Ορισμός</u> Ένα σύνολο n γραμμ. ανεξάρτητων λύσεων της (E_n^0) καλείται <u>βασικό σύνολο λύσεων</u> (β.σ.λ.)

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΤΟ ΒΙΒΛΙΟ

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 6</u> Υπάρχουν β.σ.λ. της (E_n^i)

<u>Απόδειξη</u>

Ας είναι $y_1, \dots, y_n$ οι λύσεις των π.α.τ. που αποτελείται από την (E_n^0) και τις αρχικές συνθήκες.

$y_1(x_0) = 1$, $y_1'(x_0) = 0 = \dots = y_1^{(n+1)}(x_0)$

$y_2(x_0) = 0$, $y_2'(x_0) = 1$, $y_2''(x_0) = 0 = \dots = y_2^{(n+1)}(x_0)$

$y_3(x_0) = 0$, $y_3'(x_0) = 0$, $y_3''(x_0) = 0$, $y_3^{(k)}(x_0)$, $k = 0, \dots$

Παρατηρώ ότι $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Επομένως (από το θεώρημα Liouville)
$W(y_1, \ldots, y_i(x)) \neq 0 , x \in I$

άρα ( ) οι λύσεις $y_1, \ldots, y_n$ της (E_n^0) είναι γρ. ανεξ.

ΘΕΩΡΗΜΑ (7) Ας είναι $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ένα βασικό σύνολο λύσεων την (E_n^0). Τότε για μια λύση y της (E_n^0) υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένες σταθερές $C_1, \ldots, C_n$ έτσι ώστε
$y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) , x \in I.$

και ας είναι y μια λύση της (E_n^0)

Απόδειξη:
θεωρώ το γραμμικό σύστημα (ως προς $C_1, \ldots, C_n$)

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y'(x_0) \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Παρατηρώ ότι η ορίζουσα του συστήματος είναι η

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0.$$

Οι $(y_1, \ldots, y_n)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Επομένως το σύστημα δέχεται ακριβώς μια λύση $C_1, \ldots, C_n$.

Θεωρώ τη συνάρτηση

$$\tilde{y}(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x), \quad x \in I.$$

όπου $(c_1, \dots, c_n)$ η λύση του (S)

Η $\tilde{y}$ είναι λύση της (E_n^0) ως γραμμικός συνδυασμός λύσεων της (E_n^0).

Επίσης, η $\tilde{y}$ ικανοποιεί τους αρ.

$$\begin{cases} \tilde{y}(x_0) = c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = y(x_0) \\ \tilde{y}'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = y'(x_0) \\ \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \dots \dots \qquad = y^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

δηλ. οι $y, \tilde{y}$ (οι $y_0, \tilde{y}$ είναι γρ. ανεξ.)

Επομένως το σύστημα δέχεται ακριβώς μια λύση $c_1, \dots, c_n$

π.α.τ. άρα $y = \tilde{y}$ και $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$, $x \in I$.

Παράδειγμα Να επιλυθεί η γραμμ. διαφορική εξίσωση

$$x^3 y''' - 4x^2 y'' + 8xy' - 8y = 0, \quad x > 0$$

$$\rightarrow y(x) = x^n.$$

Λύση

$$x^3 \cdot n(n-1)(n-2) x^{n-3} - 4x^2 n(n-1) x^{n-2} + 8x n x^{n-1} - 8x^n = 0$$

$$x^3 \cdot [n(n-1)(n-2) - 4n(n-1) + \underbrace{8n - 8}] = 0.$$

$$x^3 (n-1) \cdot [n(n-2) - 4n + 8] = 0$$

$$x^3 (n-1)(n-2)(n-4) = 0$$

$$\begin{cases} n = 1 \\ n = 2 \\ n = 4 \end{cases}$$

Άρα $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x^4$, $x > 0$. } Βασικό σύνολο λύσεων.

- θα πρέπει να δείξ. ότι οι λύσεις είναι γρ. ανεξ.

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^4 \\ 1 & 2x & 4x^3 \\ 0 & 2 & 12x^2 \end{vmatrix}$$

$$W(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 12 \end{vmatrix} = 16 - 10 = 6 \neq 0.$$

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^4, \quad x > 0$$

β ερωτ.) Να βρεθεί η λύση y_0 όπου ικανοποιεί τις συνθήκες $y_0(1)=0$, $y_0'(1)=1$, $y_0''(1)=2$.

$$\left.\begin{aligned} y_0(1)=0 &\Rightarrow c_1\cdot 1 + c_2 1^2 + c_3 1^4 = 0 \\ y_0'(1)=1 &\Rightarrow c_1 + 2c_2\cdot 1 + 4c_3\cdot 1^3 = 1 \\ y_0''(1)=2 &\Rightarrow 2c_2 + 12c_3\cdot 1 = 2 \end{aligned}\right\}$$

Ασκ 4/σελ. 83

$$y''' - 6y'' + 5y' + 12y = 0, \quad y(x) = e^{cx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Λύση:

$$c^3 \cdot e^{c\cdot x} - 6c^2 \cdot e^{cx} + 5c\cdot e^{cx} + 12 e^{cx} = 0$$

$$e^{cx}(c^3 - 6c^2 + 5c + 12) = 0 \Rightarrow (c+1)(c^2 - 7c + 12) = 0$$

$$(c+1)(c-3)(c-4) = 0$$

1	-6	5	12
	-1	7	-12
1	-7	12	0

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= e^{-x} \\ y_2(x) &= e^{3x} \\ y_3(x) &= e^{4y}. \end{aligned}\right\} \text{λύσεις Β.σ.λ.}$$

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + c_4 e^{4x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 Ας είναι y_1 μια λύση της (E_n^0) τότε η αντικατάσταση $y = u y_1$ μετασχηματίζει τη (E_n^0) σε μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση $n-1$ τάξης (ως προς v) (E_0^*) $\boxed{u' = v}$

αν $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ είναι ένα β.σ.λ. της (E_0^*), τότε ένα β.σ.λ. της (E_0^n) είναι το

$$y_1(x),\ y_i(x) = y_1(x)\int_{x_0}^{x} v_{i-1}(s)\,ds,\ (i=2,\dots,n),\ x\in I.$$

$$y'' + \alpha y' + by = 0 \qquad (E_2^0)$$

$\to y_1$

$$\left.\begin{aligned} y &= u y_1 \\ v &= u' \end{aligned}\right\| \longrightarrow (E_2^*)$$

α' τάξης

$\downarrow$

$v(x)$ $\qquad \{y_1(x), y_1(x)\int_{x_0}^{x} v(s)\,ds,\ x\in I\}.$

(Σελ. 81

Παράδειγμα 7 $(2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y = 0 \quad , x > -\frac{1}{2}$

$y_1(x) = e^{cx},\ x > -\frac{1}{2}$

$(2x+1)c^2 e^{cx} - 4(x+1)\cdot c\cdot e^{cx} + 4\cdot e^{cx} = 0$

$e^{cx}[(2x+1)c^2 - 4(x+1)c + 4] = 0 \quad , x > -\frac{1}{2}$

$(2c^2 - 4c)x + c^2 - 4c + 4 = 0,\ x > -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} 2c(c-2) = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{c = 2}$$

No. Date

$y(x) = e^{2x}, \quad x > -\frac{1}{2}$ ← μια λύση

οι υπόλοιπες $y = u \cdot e^{2x}, \quad y = u'$

$(2x+1)(e^{2x} u'' + 4 \cdot e^{2x} + u \cdot u \, e^{2x})$

$-4(x+1)(u' e^{2x} + 2 \cdot e^{2x} \cdot u)$

$+ 4 \cdot u \cdot e^{2x} = 0$

$\boxed{u' = v}$

Το θεώρημα 10 είναι εκτός ύλης.
θα ακολουθούμε την διαδικασία για να βρίσκουμε.